

Title	パッシブスカラー乱流における間欠性とスケーリング (乱流現象と力学系的縮約)
Author(s)	渡邊, 威; 後藤, 俊幸
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1434: 224-233
Issue Date	2005-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/47440">http://hdl.handle.net/2433/47440</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## パッシブスカラー乱流における間欠性とスケーリング

名古屋工業大学大学院機能工学専攻 渡邊 威 (Takeshi WATANABE) watanabe@nitech.ac.jp  
後藤 俊幸 (Toshiyuki GOTOH) gotoh.toshiyuki@nitech.ac.jp

Department of Engineering Physics,  
Nagoya Institute of Technology

### Abstract

Statistics of a passive scalar transported by strong homogeneous turbulence under the uniform mean scalar gradient is investigated by performing high-resolution direct numerical simulation (DNS). We discuss the different nature of intermittency in the passive scalar field originated from the injection mechanisms, i.e. the random source or the mean scalar gradient. It is found that the passive scalar field imposed by the mean scalar gradient is more intermittent than the case for random source. Moreover we show that the scaling exponents evaluated by the scalar structure functions are almost same for both the parallel and perpendicular components to the mean scalar gradient, where they saturate as  $\zeta_{\infty}^{\parallel} \simeq 1.3$  and  $\zeta_{\infty}^{\perp} \simeq 1.3$  at high-order. These features are confirmed by examining the scaling form of the scalar increment probability density functions (PDFs) leading to the saturation of scaling exponents. Furthermore it is clarified that the functional forms of the scalar increment PDFs for rare events are approximated by the single point PDF for the scalar field. This nature is also discussed in connection with the ramp-cliff structure and the saturation of scaling exponents. We present the important characteristics of the scaling law for structure functions being free from the details of the injection mechanism.

## 1 Introduction

化学物質の攪拌や燃焼を伴う工学的流れや、大気海洋系における汚染物質の拡散問題は、乱流による物質濃度、温度等の輸送混合過程が主要な物理過程であり、これらは近似的に受動的なスカラー量 (パッシブスカラー) とみなすことができる。乱流中のパッシブスカラーの輸送問題は基礎的乱流研究の中心的トピックの1つであり、その輸送過程に関連する動力学と統計性質の理解に向けて、理論・数値あるいは実験による研究が数多く行われている [1]。

これまで我々は定常一様乱流によって輸送されるパッシブスカラーの統計性質について、高解像度直接数値計算 (direct numerical simulation, 以下 DNS) を実行して調べてきた [2]。以前の研究では低波数領域の波数バンドに等方的なランダムソースを印加する事で、スカラー場の定常状態と等方性を実現している。しかし例えば大気海洋中の温度や物質濃度といったスカラー場の振る舞いに着目する時、スカラー量の供給はシステム全体に渡って印加される平均スカラー勾配がその源である [3]。スカラー量の乱流輸送に関する基礎理論的な研究を行う時、次のステップとして一様平均スカラー勾配の存在がスカラー場の統計法則へ与える影響と輸送問題に果たす役割を理解することが重要である。

ランダムソース下のスカラー場は、なだらかな plateau と鋭い cliff が卓越した mesa-canyon 構造を示す [2]。一方一様平均スカラー勾配下のスカラー場は強い非等方性を示し、勾配軸方向に ramp-cliff 構造と呼ばれる特徴的な構造を示す事が知られている [1]。これらの構造はスカラー場における間欠性の問題と深くかかわっており、2点スカラー差の高次構造関数におけるスケーリング指数の振る舞いに代表されるように、スカラー場は速度場に比べて強い間欠性を示す事が明らかにされている [2, 4, 5, 6]。

そこで本研究では発達した乱流中のスカラー輸送に関して高解像度 DNS を実行し、そのデータ解析からスカラー場の間欠性とそのスケーリング特性について調べた結果を報告する。スカラー量の輸送混合過程とその統計性質は、一般に Schmidt 数  $Sc = \nu/\kappa$  に強く依存する [7, 8, 9]。これまでに粘性移流領域 (viscous-convective range, 以下 VCR) における輸送性質については多くの研究の蓄積があるが、発達した乱流中のパッシブスカラー輸送、即ち慣性移流領域 (inertial-convective range, 以下 ICR) における輸送過程に関しての数値的研究の報告は少ない。本研究の目的はスカラー場の  $Sc$  数依存性ではなく、一様平均スカラー勾配の存在がスカラー量の輸送過程ならびにスカラー場の統計特性に与える影響を調べることにある。一様平均スカラー勾配下の乱流輸送とその間欠性に関して、スカラー場の勾配方向とその垂直方向についての間欠性の差異、あるいは外部ソースの違いに起因する間欠性の差異を詳細に解析し、一様平均スカラー勾配がスカラー場の統計と構造、またその乱流輸送に果たす役割を議論したい。

## 2 Direct numerical simulations

速度場  $u_i(\mathbf{x}, t)$  が従う非圧縮性流体の基礎方程式と、スカラー場  $\theta(\mathbf{x}, t)$  が従う移流拡散方程式は、それぞれ

$$(\partial_t + u_j \partial_j) u_i = -\partial_i P + \nu \partial_j^2 u_i + f_i, \quad \partial_i u_i = 0, \quad (2.1)$$

$$(\partial_t + u_j \partial_j) \theta = \kappa \partial_j^2 \theta + f_\theta, \quad (2.2)$$

で与えられる。 $\kappa$  は分子拡散係数、 $f_\theta$  はスカラー場の外部ソースであり、ここではガウシアンホワイトランダムソースによる場合 (case R)[2] と特定の軸方向に印加される一様平均スカラー勾配によるソース (case G)

$$f_\theta = -u_j \partial_j \Phi, \quad \nabla \Phi = (0, 0, G) \quad (2.3)$$

の2種類を扱う [7, 9, 10, 11]. 即ち、一様平均スカラー勾配の方向は  $x_3 = z$  軸方向にある。また本研究では  $S_c = 1$  の場合を扱う。空間は一辺の長さが  $2\pi$  の3重周期境界の立方体であり、非線型項の計算には擬スペクトル法を用いた。DNSの計算精度において最も重要なパラメータは  $K_{max}\bar{\eta}$  であるが、ここではすべて  $K_{max}\bar{\eta} = 1$  程度をとる。これは微分量の高次統計を議論するうえでは不十分な計算条件であるが [12, 13], 慣性領域スケールの統計を議論する上では大きな問題は生じない事が最近の我々の研究により明らかにされている [13].  $R_\lambda(K_{max})$  が小さいほうから順に Run 1, Run 2, Run 3 と名づける。また Run 2 については  $G = 1, 10$  の2通りについてシミュレーションを行った (Run 2a, 2b). また比較のために、ランダムソースを用いた高 Reynolds 数 DNS の結果 [2] を case R として同時に示す (Run A, B). 時間積分は4次のルンゲ・クッタ・ジル法を用いた。Table I に計算パラメータの値と代表的な統計量の値をまとめたものを示す。なお計算条件や統計量の定義、case R の詳細な結果については我々の過去の文献 [2] を参照されたい。なお本報告では最も  $R_\lambda$  が高い DNS の結果について主に議論する。

Table I DNS parameters

	○ case G				○ case R	
	Run 1	Run 2a	Run 2b	Run 3	Run A	Run B
$N^3$	$256^3$	$512^3$	$512^3$	$1024^3$	$512^3$	$1024^3$
$\nu (= \kappa)$	$1.3 \times 10^{-3}$	$6.0 \times 10^{-4}$	$6.0 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$	$6.0 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$
$G$	1	1	10	1	—	—
$R_\lambda (= P_\lambda)$	174	263	282	468	258	427
$\bar{\eta} (= \bar{\eta}_B)$	$8.18 \times 10^{-3}$	$4.50 \times 10^{-3}$	$4.56 \times 10^{-3}$	$2.18 \times 10^{-3}$	$4.55 \times 10^{-3}$	$2.20 \times 10^{-3}$
$K_{max}\bar{\eta}$	0.99	1.09	1.10	1.05	1.10	1.06
$E$	1.71	1.81	1.90	2.20	1.74	1.97
$E_\theta$	1.29	1.24	1.56	1.77	1.01	0.99
$\bar{\epsilon}$	0.495	0.528	0.517	0.615	0.507	0.591
$\bar{\chi}$	0.886	0.879	98.37	1.343	0.558	0.598
$\hat{\epsilon} = \bar{\epsilon}L/u_{rms}^3$	0.482	0.468	0.450	0.444	0.478	0.464
$\hat{\chi} = \bar{\chi}L/(u_{rms}\theta_{rms}^2)$	0.379	0.378	0.347	0.402	0.301	0.311
$-S_u$	0.508	0.530	0.539	0.559	0.535	0.558
$-S_\theta$	0.434	0.458	0.459	0.450	0.454	0.443
$\lambda$	$2.12 \times 10^{-1}$	$1.44 \times 10^{-1}$	$1.51 \times 10^{-1}$	$9.27 \times 10^{-2}$	$1.44 \times 10^{-1}$	$8.95 \times 10^{-2}$
$\lambda_\theta$	$1.07 \times 10^{-1}$	$7.12 \times 10^{-2}$	$7.62 \times 10^{-2}$	$4.32 \times 10^{-2}$	$8.06 \times 10^{-2}$	$4.88 \times 10^{-2}$
$L$	1.18	1.17	1.24	1.28	1.18	1.18
$L_\theta$	0.745	0.752	0.841	0.778	0.814	0.826
$T_{av}(T_{eddy})$	27.1	5.62	5.45	3.97	5.49	2.43

## 3 Results

本節では2点スカラー差の統計性質を議論する。一様平均スカラー勾配方向に対して平行成分を  $\parallel$  の添え字で表し、垂直成分を  $\perp$  で表す。ここで2点スカラー差は次式で定義される。

$$\delta_{\parallel}\theta_r = \theta(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_{\parallel}) - \theta(\mathbf{x}), \quad \delta_{\perp}\theta_r = \theta(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_{\perp}) - \theta(\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

ここで  $\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp}$  はそれぞれスカラー勾配方向に平行、垂直な単位ベクトルを表す。

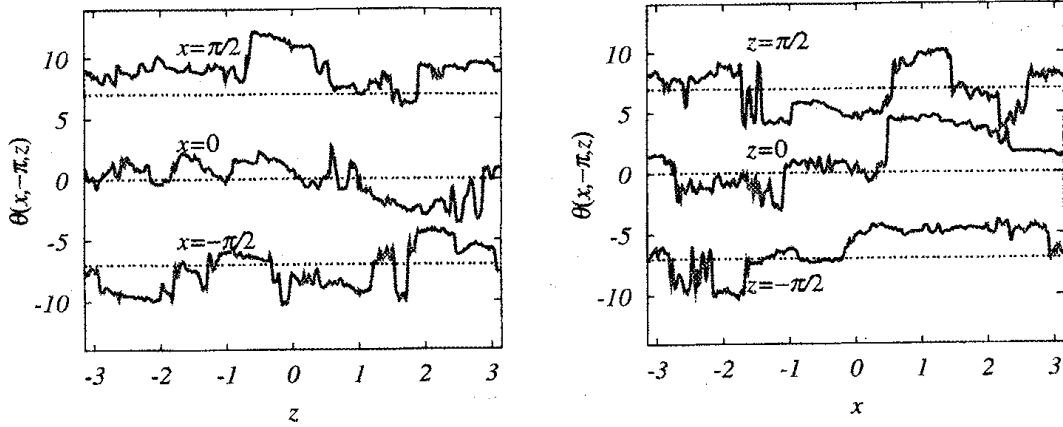


Figure 1: One-dimensional profiles of scalar field obtained from Run 2a. Left figure shows the profiles at  $y = -\pi$  with  $x = -\pi/2, 0, \pi/2$ , and right figure does at  $y = -\pi$  with  $z = -\pi/2, 0, \pi/2$ . Horizontal dot lines denote the each zero level of  $\theta$ .

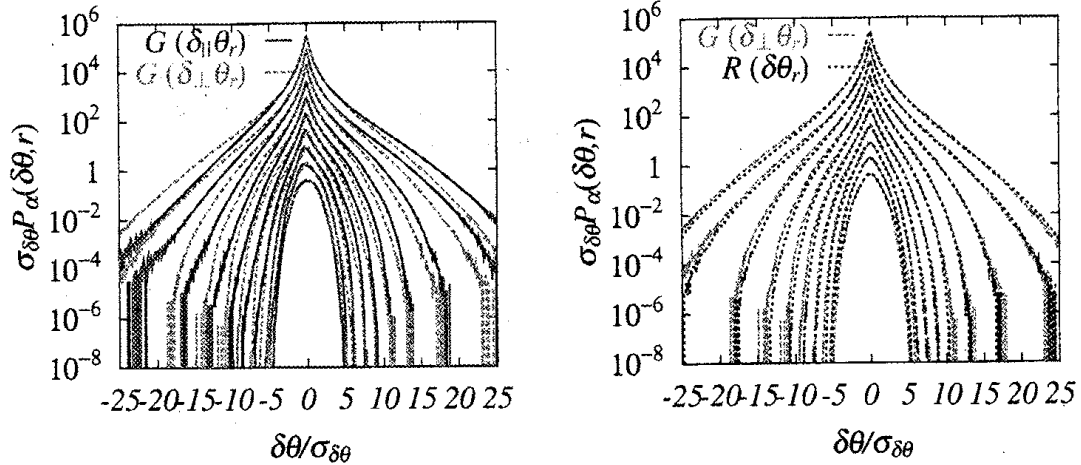


Figure 2: Comparison of the normalized PDFs for scalar increments between  $\delta_{\parallel}\theta_r$  and  $\delta_{\perp}\theta_r$  (left), case G and case R (right) obtained from Runs 3 and B. Scale is  $r = 2^n\pi/N$  with  $n = 1, 2, \dots, 10$  from the uppermost curve.

### 3.1 Structures

一様平均スカラー勾配方向に対して、平行方向と垂直方向におけるスカラー場の構造の差異について述べる。Fig.1はスカラー場の $x$ 軸方向ならびに $z$ 軸方向の1次元変動の様子を示している。平均勾配に平行な方向において、スカラー場は $\theta \sim A - z$ で近似される $-1$ の傾きを持ったrampと、急激なスカラー変動の境界に対応するcliffが交互に現れる様子がわかる。このrampが持続するスケールはおおよそ $L$ 程度である。また垂直方向にはrampは存在せず、むしろplateauとcliffが存在することに注目したい。つまり平均勾配方向に垂直な成分と平行な成分とでは若干異なる空間構造を持つことがわかる。この違いが統計性質にどのような影響を及ぼすか調べていく。

### 3.2 PDF for scalar increments

2点スカラー差のPDFの振る舞いの違いを調べる。Fig.2は $\delta_{\parallel}\theta_r$ と $\delta_{\perp}\theta_r$ のPDF  $P_{\parallel}(\delta\theta, r)$ ,  $P_{\perp}(\delta\theta, r)$ を各スケール  $r = 2^n\pi/N$  ( $n = 1, \dots, 10$ ) 毎にそれぞれ示している。ここで $\langle \dots \rangle$ は時間、空間平均を表す。2点差が小さくなるにつれて、PDFの裾は大きな確率を持つようになる様子がわかる。また $P_{\perp}$ が左右対称であるのに対して、 $P_{\parallel}$ は小スケールになるにつれ、非対称性の度合いが大きくなる。逆にスケールを大きくするについて  $P_{\parallel}$ は次第に対称的な関数形を示すようになり、 $P_{\perp}$ との違いはほとんど見出されない。一方 $P_{\perp}$ とcase RのPDFはすべてのスケールでほぼ同じ関数形に従う事がわかる。外部ソースの違いにもかかわらず、

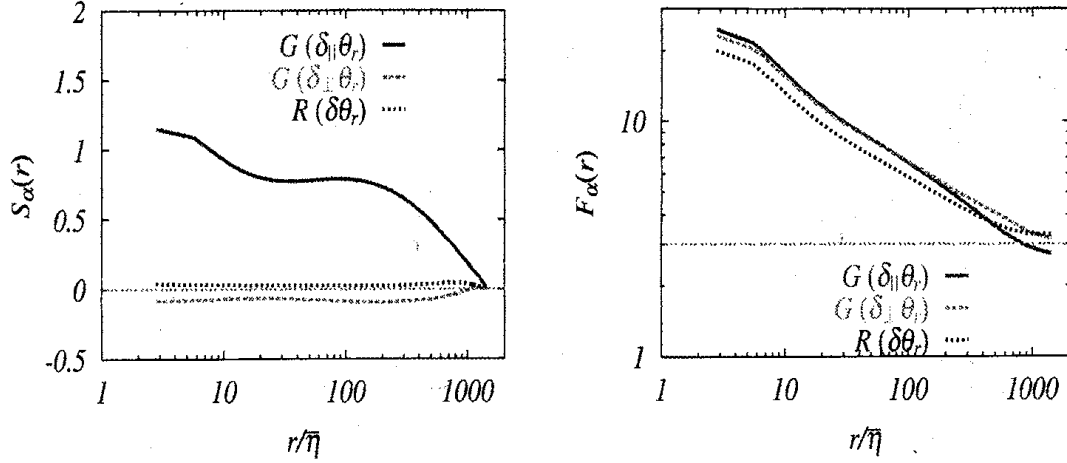


Figure 3: Behavior of skewness (left) and flatness (right) factors for scalar increments of case G,  $\delta_{\parallel}\theta_r$  and  $\delta_{\perp}\theta_r$ , for Run 3. Case R is the result from the passive scalar DNS (Run B) with the isotropic random source [2].

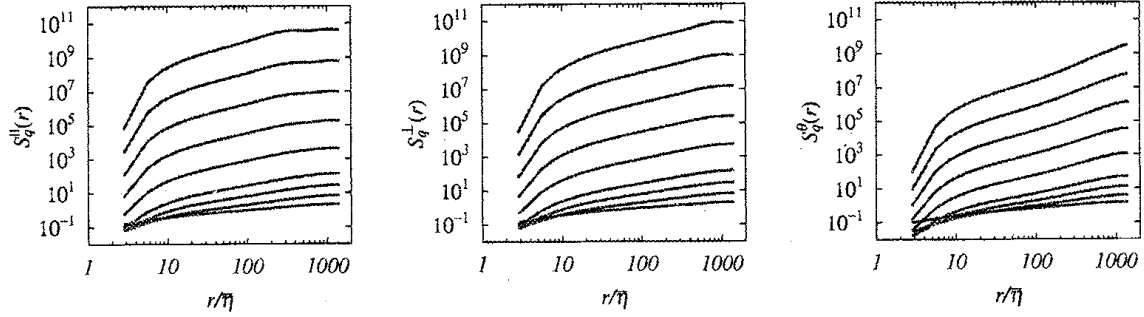


Figure 4: Behavior of scalar structure functions for case G ( $\delta_{\parallel}\theta_r$ : left,  $\delta_{\perp}\theta_r$ : center) and case R (right) obtained from Runs 3 and B. The order is  $q = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12$  and 14 from the lowermost curve.

PDF の振る舞いがその詳細にあまり敏感でないという性質は興味深い。この点は後に議論する。

$\delta_{\parallel}\theta_r$  と  $\delta_{\perp}\theta_r$  の統計性質の違いを定量的に調べるために、skewness  $S_\alpha(r)$  と flatness  $F_\alpha(r)$  ( $\alpha = \parallel$  or  $\perp$ )

$$S_\alpha(r) = \frac{\langle (\delta_\alpha \theta_r)^3 \rangle}{\langle (\delta_\alpha \theta_r)^2 \rangle^{3/2}}, \quad F_\alpha(r) = \frac{\langle (\delta_\alpha \theta_r)^4 \rangle}{\langle (\delta_\alpha \theta_r)^2 \rangle^2}, \quad (3.2)$$

の振る舞いの比較を Fig.3 に示す。平行成分の skewness はスケールが小さくなるにつれて 0 から外れた値をとる事がわかるが、垂直成分に関しては分布の対称性からすべてのスケールで 0 に近い。一方 flatness の振る舞いに関しては、積分スケール近傍では 3 に近い値をとり、スケールが小さくなるにつれてガウス分布からずれていく様子がわかる。平行成分と垂直成分を比較すると、すべてのスケールで大きな違いは見出されない。またこれらは case R と比較しても大きな違いを見ることはできない。次節でより高次の構造関数の振る舞いに注目する。

### 3.3 Structure functions and scaling exponents

ここでは高次構造関数とそのスケール特性を解析する。Fig.4 はスカラー構造関数

$$S_q^\parallel(r) = \langle |\delta_{\parallel}\theta_r|^q \rangle, \quad S_q^\perp(r) = \langle |\delta_{\perp}\theta_r|^q \rangle \quad (3.3)$$

の振る舞いを case G, case R の場合に  $q = 1$  から 14 まで示している。モーメントの次数が大きくなるにつれ、冪則を示す直線の勾配が大きくなる様子がそれぞれについて確認できる。また case G についてはある程度大きな次数になると、その勾配はあまり変化しないようである。一方で case R については、次数の増大に

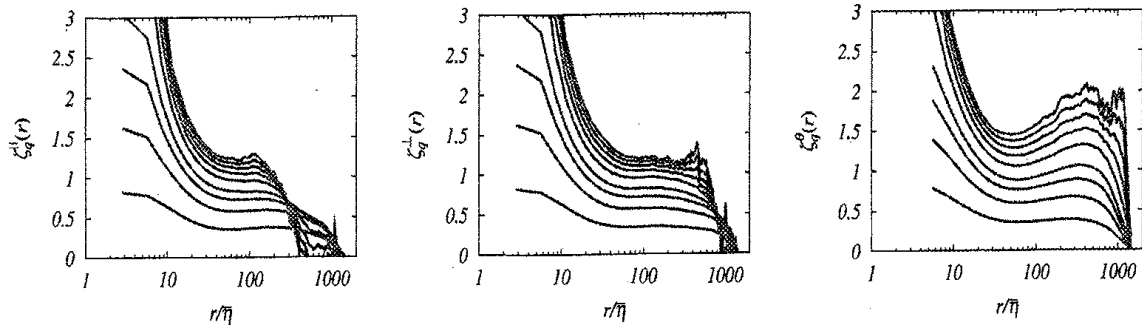


Figure 5: Variation of local scaling exponents evaluated by the scalar structure functions in Fig.4 (Runs 3 and B). The order is  $q = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12$  and 14 from the lowermost curve.

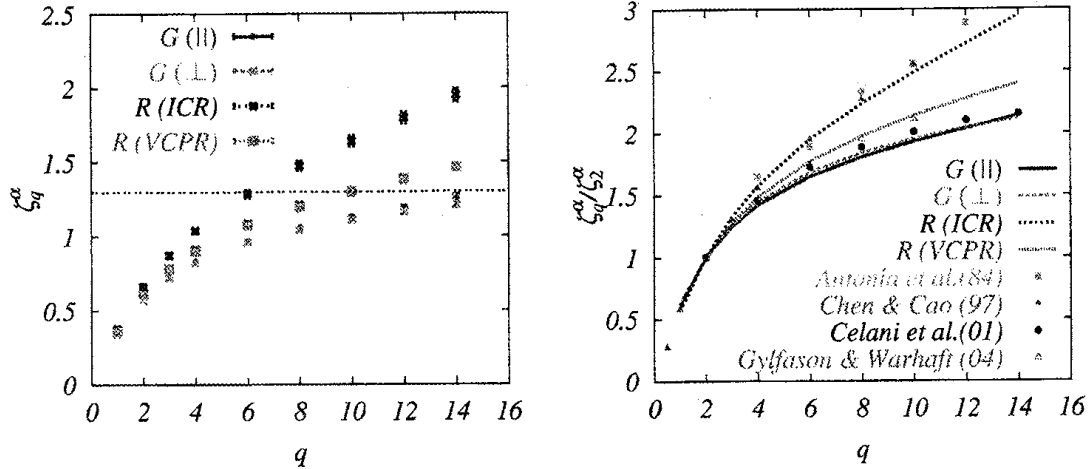


Figure 6: Comparison of the  $q$ -th order scaling exponents  $\zeta_q^\alpha$  for the scalar structure functions (left) obtained from Runs 3 and B, and their relative scalings defined by  $\zeta_q/\zeta_2$  (right).

つて、勾配が増大する領域と飽和する領域に分かれていく様子が確認できる。この振る舞いの詳細を調べるために、構造関数の局所スケーリング指数

$$\zeta_q^\parallel(r) = \frac{d \log S_q^\parallel(r)}{d \log r}, \quad \zeta_q^\perp(r) = \frac{d \log S_q^\perp(r)}{d \log r} \quad (3.4)$$

をそれぞれについて求めた結果を Fig.5 に示す。まず case G については  $30 < r/\eta < 180$  でそれぞれの局所スケーリング指数が一定値をとるスケール領域が存在することがわかる。ただし一定領域は平行成分に比べて垂直成分の方がより広がっている。これはスカラー場において平行方向と垂直方向の構造の差異に起因すると考えられる。さらに高次のスケーリング指数の値は次数  $q$  によらずほぼ一定値に飽和する傾向を示している。一方 case R と case G を比較すると、case R ではスケール全体に渡って単一のスケーリング領域が存在せず、次数と共に増加する領域 (ICR に相当) と次数と共に飽和する領域 (viscous-convective precursor range, VCPR に相当 [2]) の 2 領域が存在する事がわかる。

局所スケーリング指数が一定値をとる領域で値を平均し、構造関数のスケーリング指数の値を見積もる。Fig.6 は case G における平行・垂直成分、及び case R において ICR ( $200 < r/\eta < 400$ ) と VCPR ( $30 < r/\eta < 60$ ) で平均をとったスケーリング指数の次数  $q$  依存性を示したものである。この結果から次の 2 点の振る舞いは注目に値する。1) 平行成分のスケーリング指数  $\zeta_q^\parallel$  と垂直成分のスケーリング指数  $\zeta_q^\perp$  はそれぞれの次数でほぼ等しく、高次の飽和値はおおよそ 1.3 である。2) case G は case R で得られたスケーリング指数より小さい。即ち case G がより間欠性は強い。まず 1) について述べる。スケーリング指数が高次で  $q$  に寄らずに一定値に漸近するという事実は、2 点スカラー差の PDF が漸近的に

$$P_\alpha(|\delta\theta|, r) = \theta_{rms}^{-1} \left( \frac{r}{\eta} \right)^{\zeta_\infty^\alpha} Q_\alpha \left( \frac{|\delta\theta|}{\theta_{rms}} \right), \quad |\delta_\alpha \theta_r| \gg \langle (\delta_\alpha \theta_r)^2 \rangle^{1/2} \quad (3.5)$$

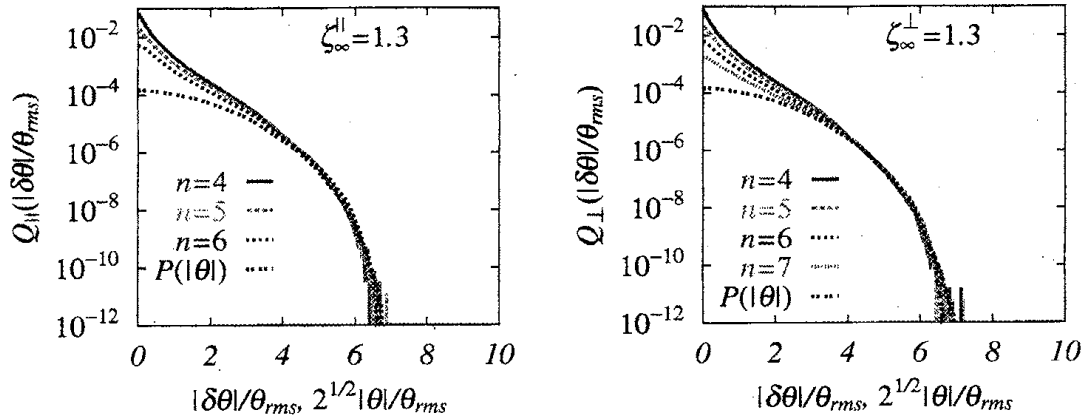


Figure 7: Asymptotic scaling law of the PDFs for scalar increments,  $|\delta_{\parallel}\theta_r|$  (left) and  $|\delta_{\perp}\theta_r|$  (right). Index  $n$  means the scale  $r = 2^n \pi / N$ .

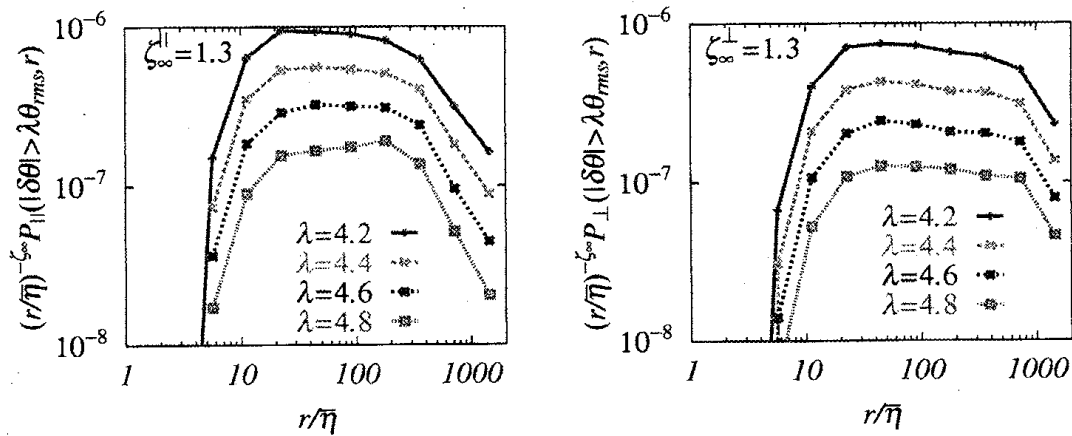


Figure 8: Behavior of compensated cumulative PDFs for the scalar increments,  $|\delta_{\parallel}\theta_r|$  (left) and  $|\delta_{\perp}\theta_r|$  (right).

のスケリング則を満たすことを意味する [2, 4, 5].  $Q_{\alpha}(x)$  はスケール  $r$  によらないスケリング関数である. Fig.7 は上式のスケリング則が成立しているかどうかを調べるため, スケリング指数の漸近値として  $\zeta_{\infty}^{\parallel} = \zeta_{\infty}^{\perp} = 1.3$  を選んだ時の (3.5) 式のスケリングプロットを示している. 2 点 PDF のスケール  $r$  は, スケリング指数を見積もった領域内 ( $30 < r/\eta < 180$ ) にある. Fig.7 の結果から, PDF のスケリング則 (3.5) はその分布の裾の部分で非常によく成立していることがわかる.

さらにスケリング指数  $\zeta_{\infty}$  の漸近値について調べる. スケリングプロットで用いた値  $\zeta_{\infty}^{\parallel} = \zeta_{\infty}^{\perp} = 1.3$  は Fig.6 から見積もった値であり, その値に確かな根拠はない. PDF からこの値を見積もるために, (3.5) 式のスケリング則が当てはまるとして, 次の累積分布

$$P_{\alpha}(|\delta\theta| > \lambda\theta_{rms}, r) = \int_{\lambda\theta_{rms}}^{\infty} P_{\alpha}(|\delta\theta|, r) d|\delta\theta| \quad (3.6)$$

の振る舞いを調べる.  $\lambda$  は任意の実数パラメータであり, Fig.7 の結果から分布の裾でスケリング則が成立することを考慮して  $\lambda > 4$  を選んだ. もし (3.5) 式が成立していれば, (3.6) 式から  $P_{\alpha}(|\delta\theta| > \lambda\theta_{rms}, r) \sim r^{\zeta_{\infty}^{\alpha}}$  となり漸近値を抜き出すことができる. 結果を Fig.8 に示す. 局所スケリング指数が一定となるスケールでスケリング指数の飽和値は 1.3 に近い値をとることが確認できる.

本研究で得たスケリング指数の飽和現象は, これまでのパッシブスカラー乱流の研究においても観測されている. 例えば Moisy らは低温ヘリウム乱流中の温度揺らぎの測定から, 温度構造関数のスケリング指数は高次で 1.45 に漸近することを見出している [6]. また Celani らは 2 次元エネルギー逆カスケード領域におけるパッシブスカラーの輸送問題を取り扱っており, 本研究に対応する case R と case G のそれぞれの場合において構造関数のスケリング指数の解析を行った [4, 5]. 結果スケリング指数はソースの

詳細に依存しないこと (case G と case R は同じ間欠性を示す), また高次ではそれぞれ 1.4 に漸近することを見出し, スカラー乱流の間欠性がスカラー場のソースに依存しない普遍性を示す事を議論している. ところが本研究における case G と case R の構造関数のスケーリング指数を比較すると明らかな違いが見られ, この点で Celani らが得た結論とは異なる結果となった. この原因を考察する. まず 2 次元乱流のエネルギー逆カスケード領域では, 速度場は間欠性を示さない (即ち  $\zeta_q^L = q/3$ ) 事が知られており [14], 3 次元乱流による慣性領域のものとは大きく異なる. 特に強い揺らぎの性質が重要になる高次統計ではその違いは決定的であると考えられる. つまりスカラー場の統計は, 移流する乱流速度場の統計によって大きく異なることが示唆される. これはランダム速度場によって輸送されるパッシブスカラー場の理論解析 [15, 16] において, スカラー構造関数のスケーリング指数の振る舞いが 2 次速度構造関数のスケーリング指数の値によって大きく異なることから予測される事である.

## 4 Discussion

最後に本研究で得られたスカラー場の間欠性の特徴について, 過去の実験・DNS の結果と比較する. Fig.6 に相対スケーリング指数  $\zeta_q^\alpha / \zeta_2^\alpha$  について, せん断乱流 [17], 3 次元 DNS (本研究の Run A に相当) [18], 2 次元 DNS [4, 5], 格子乱流 [19] で得られた値と比較したものを示している. これらまでの実験, DNS による結果は Gylfason & Warhaft [19] によって指摘されているように, スケーリング指数の値は実験の境界条件等によって大きく異なる傾向にあることがわかる. 本 DNS においても case G と case R ではその値は大きく異なるが, 過去のデータは case R の振る舞いに近いケース [17, 18] と case G の振る舞いに近いケース [5, 19] が存在するようである. これらのデータの収束性の悪さは速度構造関数のスケーリング指数の振る舞いとは対照的であり [20], パッシブスカラー乱流の大きな特徴の 1 つと考えられる. この性質について考察する.

まずスケーリング指数の振る舞いに関連して, 2 点スカラー差 PDF のスケーリング関数  $Q_\alpha(x)$  の性質について議論する. Fig.7 の分布関数の裾は sub-Gaussian であること, またスカラー場の 1 点 PDF  $P(\theta)$  の裾もまた sub-Gaussian であることから (Fig.9 左図), 両者には何かの類似性があることが示唆される. Fig.7 にスケーリング関数  $Q_\alpha(x)$  とスカラー場の一点 PDF  $P(|\theta|)$  を次式で変換したスケーリング関数  $h(x)$

$$P(|\theta|) = \frac{\sqrt{2}}{\theta_{rms}} \left( \frac{L}{\bar{\eta}} \right)^{\zeta_\infty^\alpha} h \left( \frac{\sqrt{2}|\theta|}{\theta_{rms}} \right) \quad (4.1)$$

の振る舞いを比較した結果を示している. ここで  $\zeta_\infty^\alpha = 1.3$  を用いた. 両者の一致は非常によく,

$$Q_\alpha(x) \simeq h(x) \quad (x \geq 4) \quad (4.2)$$

が成立している. これは小スケールにおけるスカラー場の統計について, その大きな値を持つイベントは大スケールの統計性質と密接に関連している事を示唆している. またこの性質から Fig.6 の非普遍的な振る舞いを考察する. 今スカラー差  $|\delta\theta_r|$  の統計性質が, そのスケーリング特性と密接に関連する singular な部分とグローバルな変動部分の 2 変数のランダム変数の統計性質によって説明されるとしよう. つまり

$$|\delta\theta_r| \sim \sqrt{2}|\theta| \left( \frac{L}{r} \right)^z \quad (4.3)$$

の形を仮定しよう. ここで  $|\theta|$  はスカラー場の揺らぎを表すランダム変数であり,  $z$  はスカラー構造関数のスケーリング指数の振る舞いを決定するあるランダム変数である. 高次構造関数のスケーリング指数の飽和現象は,  $|z| \ll 1$ ,  $|\theta| \gg \theta_{rms}$  を意味している. このとき上式は分布関数の裾が  $|\theta|$  の一点 PDF で与えられる事を説明する. さらに Fig.1 の空間構造を考慮すると,  $|z| \ll 1$ ,  $|\theta| \gg \theta_{rms}$  という状況は 2 点差がスカラー場で形成される cliff を跨る時に生じると考えられ, cliff の空間分布のサポートの統計性質が飽和値  $\zeta_\infty^\alpha$  の値を決定すると解釈できる.

パッシブスカラー場の構造関数のスケーリング指数の振る舞いは, case G と case R では大きく異なる事が示された (Fig.6). 両者の違いは外部ソースの違いによるものであり, この性質は大スケールで与えられる条件が小スケールの統計に大きな影響を及ぼすことを示している. つまりスカラー量の輸送過程において, スカラー場の小スケールの統計は非普遍的であることが示唆される [19]. 前述した性質を考慮すると, これは (4.3) 式から次のように考えられる. スカラー場の揺らぎの singular な部分はスカラー勾配  $g_i = \partial_i \theta$  のダイナミクス

$$\frac{D}{Dt} g_i^2 = -2g_i S_{ij} g_j + 2g_i (\partial_i f_\theta) \quad (4.4)$$



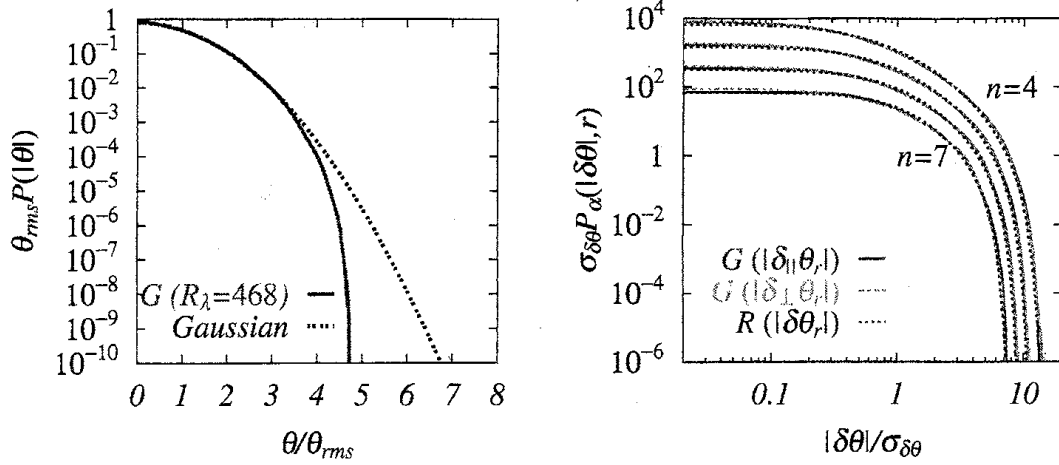


Figure 9: Behavior of PDFs for  $|\theta|$  obtained from Run 3 (left), and for  $|\delta\theta_r|$  obtained from Run 3 and B (right). Each PDF is normalized by the standard deviations of  $\delta\theta_r$ . Index  $n$  means the scale  $r = 2^n \pi / N$ .

に支配され、右辺第1項が支配的であればスカラー勾配とストレイン場  $S_{ij}$  の相関がそのダイナミクスの中心的な役割を果たし、外部ソースは重要ではない。一方グローバルな変動はスカラー場のダイナミクス

$$\frac{D}{Dt} \theta^2 = \theta f_\theta \quad (4.5)$$

に支配され、これは外部ソースの詳細に強く依存すると考えられる。2点スカラー差を眺めた時、これらの性質が相乗した結果としてその統計性質に反映されると考えると、非普遍的な振る舞いの説明がつく。よってスカラー構造関数の振る舞いは一般に外部ソースの詳細に依存し、本研究における case G と case R のスケリングの振る舞いの差異はこうにして生じることが予想される。しかし singular な成分の統計がストレイン場との結合によってのみ支配されているなら、スカラー場が外部ソースの詳細に寄らない統計性質を有する可能性もある。

この様な観点に立って今、両者の PDF の振る舞いに着目しよう。Fig.9 にスケリング領域内の標準化した2点PDFの振る舞いを case G, case R についてそれぞれ示している。分布の裾の部分は若干のずれが見られるが、分布の最確値から中間規模の揺らぎに渡って両者の振る舞いは非常によく一致していることが伺える。つまり標準化したPDFの振る舞いは、スカラー場の外部ソースの詳細には依存しないようである。この解析結果は構造関数  $S_q^\alpha(r)$  のスケリング指数よりむしろ、その規格化したモーメントのスケリング指数に着目すると大スケールの詳細に依存しないスケリング則が存在する可能性を示している。実際に規格化したモーメントのスケリング指数

$$\frac{S_q^\alpha(r)}{S_2^\alpha(r)^{q/2}} \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{z_q^\alpha}, \quad z_q^\alpha = \zeta_q^\alpha - q\zeta_2^\alpha/2 \quad (4.6)$$

を Fig.6 の結果を用いてプロットした図を Fig.10 に示す。ここで case R については、Fig.10 左図に示すように上式の local slope の振る舞いを調べた。Fig.5 と比較して Fig.10 では単一のスケリング領域を有するという事実は注目に値する。Fig.10 右図の結果から Fig.6 では case G と R で一致しなかったスケリング指数の振る舞いが両者で非常に良く一致することがわかる。これらの事実は、スカラー構造関数が一般に

$$S_q^\alpha(r) \sim \theta_{rms}^q [\tilde{f}(r)]^q \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta_q^\alpha} \quad (4.7)$$

の形で記述される事を示唆している。ここで  $\tilde{f}(r)$  は次数  $q$  には依存しないが、外部ソースといった大スケールの詳細に依存するある無次元スケリング関数である。 $\tilde{f}(r)$  が例えばべき関数  $\tilde{f}(r) \sim (r/L)^{-\gamma}$  ( $\gamma \ll 1$ ) で与えられる時、構造関数はスケリング則を示すが、一般に  $\gamma$  は大スケールの詳細に依存すると考えられる。case G がこの場合に相当するであろう。より極端な場合には  $\tilde{f}(r)$  はべき関数ではなく、外部ソースの詳細に依存するある任意関数かもしれない。case R がこの時に相当し、構造関数は広いスケール領域でスケリング則を示さない。(4.7) 式の関数形はより一般的な自己相似性の概念に基づくスケリング則である Generalized Extended Self-Similarity(GESS) と同様なスケリング則であるが [21, 22], その動力学に基づく起源は現時点で定かではない。

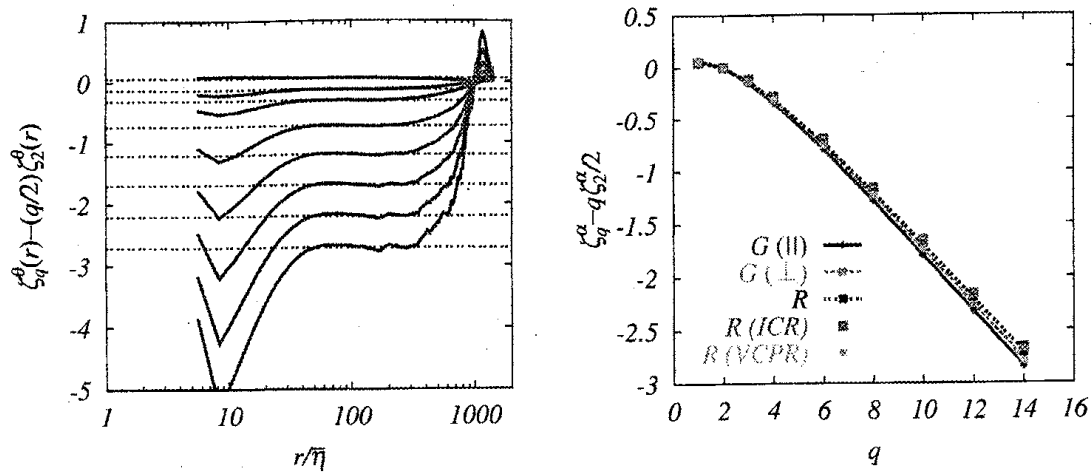


Figure 10: Behavior of local scaling exponents for the normalized scalar structure function  $S_q^\theta(r)/S_2^\theta(r)^{q/2}$  obtained from Run B (left), and comparison of scaling exponents  $\zeta_q^\alpha - q\zeta_2^\alpha/2$  for both case G and case R (right).

## 5 Summary

本研究ではパッシブスカラー乱流の高解像度 DNS を実行し、スカラー場の間欠性とスケーリングについて議論した。特に一様平均スカラー勾配が存在するとき、スカラー場の間欠性が勾配軸に対して平行な成分と垂直な成分についてどのような差異が存在するかについて詳しい解析を行った。得られた結果をまとめると次の様である。

- case G は case R と比較して相対的に強い間欠性を示す。また case G について高次構造関数のスケーリング指数は、平均勾配方向に平行な成分と垂直な成分の間に顕著な違いは見出されない。また case G ではスケーリング指数は高次で次数によらない一定値  $\zeta_\infty^\alpha \simeq \zeta_\infty^\perp \simeq 1.3$  に漸近する。
- スケーリング指数の飽和に関連して 2 点スカラー差の PDF はその裾の領域で漸近的なスケーリング則を示す。またスケーリング関数はスカラー場の 1 点 PDF と非常に良く一致している。この性質はスケーリング指数の飽和現象と関連し、スカラー場の cliff 構造の特徴を反映した結果と考えられる。
- $\zeta_q^\alpha$  は case G と R では異なる振る舞いを示すが、規格化した構造関数のスケーリング指数は両者でよく一致する。これはスカラー場の統計が大スケールの詳細によらない普遍的な統計法則を有する可能性を示唆する。

スケーリング指数の飽和現象に関しては、さらに踏み込んで理論的に理解する必要がある。case G のスケーリング指数が 1 に近い値に漸近すること、スカラー場が ramp-cliff 構造を示す事は、1 次元 Burgers 方程式

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u \quad (5.1)$$

における速度場の空間構造ならびに統計性質と対比させると大変興味深い。Burgers 乱流における速度構造関数は、高次で次数に寄らず 1 に漸近する事はよく知られており [23, 24, 25]、これは速度場で卓越する鋸場 (sawtooth) 構造の性質と密接に関連する。すなわち平均スカラー勾配下のスカラー場には構造がよく似た ramp-cliff 構造の存在がスケーリング指数の 1 への漸近を理解する鍵になる事を示唆している。このスケーリング指数の振る舞いの理解に向けて、ramp-cliff 構造の形成過程の動力学を理解すること、また cliff の空間分布とそのマルチフラクタル構造を明らかにすることが重要であると考えられる。これは今後の課題である。

またスカラー構造関数のスケーリング指数の振る舞いに関して、これまで様々な理論的アプローチが提案されている。その中核を成すアイデアは速度構造関数の間欠性の問題で展開された乱流現象論のパッシブスカラーへの応用である。つまり 2 点スカラー差は K62 [26] を拡張して

$$\delta \theta_r = v \epsilon_r^{-1/6} \chi_r^{1/2} r^{1/3} \quad (5.2)$$

と書けると仮定する。ここで  $\epsilon_r$ ,  $\chi_r$  はスケール  $r$  で局所平均されたエネルギー散逸率、スカラー分散散逸率であり、 $v$  はあるランダム変数である。局所平均散逸場に対して結合 multi-fractal モデルを採用し、 $v$  の統計

性はこれらに独立であると仮定することで様々な現象論的モデルが構築され [27, 28], また 2 点スカラー差の PDF の振る舞いを説明する事も可能である [28]. しかし本研究で述べたようにスカラー場の統計性質は, cliff 構造と大スケールの統計性質に密接に関連する. 言い換えれば, 強い揺らぎに関してランダム変数  $v$  と散逸場  $\epsilon_r$ ,  $\chi_r$  は統計的に独立と見なせないかもしれない. ((4.3) 式で  $|\theta|$  と  $z$  が独立と仮定できないことに相当する.) 本研究では散逸場のスケーリングについては扱っておらず, 散逸場がどのような統計性を示すか定かでない. より理解を深めるために, 散逸場やフラックス場の解析を今後推し進めていく必要がある.

この研究を行うにあたり, 地球シミュレータセンター及び名古屋大学情報連携基盤センターより多大のご支援をいただきました. ここに記してお礼申し上げます.

## References

- [1] Z. Warhaft, Annu. Rev. Fluid Mech. **32**, 203 (2000).
- [2] T. Watanabe and T. Gotoh, New J. Phys. **6**, 40 (2004). (<http://stacks.iop.org/1367-2630/6/40>)
- [3] G. K. Batchelor, H. K. Moffatt, and M. G. Worster (eds.), *Perspectives in Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, Cambridge 2000).
- [4] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **84**, 2385 (2000).
- [5] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola, Phys. Fluids **13**, 1768 (2001).
- [6] F. Moisy, H. Willaime, J. S. Andersen and P. Tabeling, Phys. Rev. Lett. **86**, 4827 (2001).
- [7] P. K. Yeung, S. Xu and K. R. Sreenivasan, Phys. Fluids **14**, 4178 (2002).
- [8] J. Schumacher and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **91**, 174501 (2003).
- [9] G. Brethouwer, J. C. R. Hunt, and F. T. M. Nieuwstadt, J. Fluid Mech. **474**, 193 (2003).
- [10] M. R. Overholt and S. B. Pope, Phys. Fluids **8**, 3128 (1996).
- [11] A. Pumir, Phys. Fluids **6**, 2118 (1994).
- [12] K. R. Sreenivasan, preprint (2004).
- [13] T. Watanabe and T. Gotoh, preprint (2005).
- [14] J. Paret and P. Tabeling, Phys. Fluids **10**, 3126 (1998).
- [15] R. H. Kraichnan, Phys. Rev. Lett. **72**, 1016 (1994); Phys. Rev. Lett. **78**, 4922 (1997).
- [16] S. Chen and R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 2867 (1998).
- [17] R. A. Antonia, E. J. Hopfinger, Y. Gagne and F. Anselmet, Phys. Rev. A **30**, 2704 (1984).
- [18] S. Chen and N. Cao, Phys. Rev. Lett. **78**, 3459 (1997).
- [19] A. Gylfason and Z. Warhaft, Phys. Fluids **16**, 4012 (2004).
- [20] A. Arneodo et al., Europhys. Lett. **34**, (1996) 411–416.
- [21] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia and R. Tripiccone, Phys. Rev. E **53**, R3025 (1996).
- [22] H. Fujisaka, Y. Nakayama, T. Watanabe and S. Grossmann, Phys. Rev. E **65**, (2002) 046307.
- [23] E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsuko, and M. Vergassola, J. Fluid Mech. **238**, 467 (1992).
- [24] T. Gotoh, Phys. Fluids **6**, 3985 (1994).
- [25] A. Chekhlov and V. Yakhot, Phys. Rev. E **51**, R2739 (1995).
- [26] A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- [27] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, J. Fluid Mech. **224**, 429 (1991).
- [28] I. Hosokawa, Phys. Rev. A **43**, 6735 (1991); Phys. Rev. E **40**, R4775 (1994).